ЛИНЕЙНЫЕ ИЗОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА-КАНТОРОВИЧА

Закиров Б. С., Чилин В. И.

2 марта 2023 г.

Становление теории пространств Банаха - Канторовича началось с построения интегрирования для векторных мер со значениями в K-пространствах (порядково полных векторных решетках). Важными примерами примерами ПБК являются "векторнозначные" аналоги L_p-пространств $L_p(B, m)$, $1 \leq p < \infty$ (см. Кусраев А.Г. *Мажорируемые операторы*. М.:Наука, 2003. 619с.), а также естественное расширение этого класса ПБК — "векторнозначные" аналоги $L_\Phi(B, m)$ пространств Орлича, ассоциированные с полной булевой алгеброй B и мерой m, заданной на B и принимающей значения в алгебре $L^0(\Omega)$ всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций, заданных на измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) с σ-конечной числовой мерой μ. (см. Закиров Б.С. *Решетки Орлича-Канторовича, ассоциированные с L^0-значной мерой* // Узбекский мат. журн., 2007. № 4. С. 18–34.

В случае, когда $L^0(\Omega)$ совпадает с полем действительных чисел $\mathbb{R}$, класс ПБК совпадает с классом вещественных банаховых пространств, важными примерами которых служат симметричные пространства вещественных измеримых функций на (Ω, Σ, μ). Теория таких пространств подробно изложена в монографиях

Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* – М.: Наука, 1978. ;
Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces. II. Function Spaces.* Springer, 1979.;
Edgar G.A., Sucheston L. *Stoping times and directed processes.* Cambridge University Press. 1992. 428 p.

Исследование геометрических и топологических свойств симметричных пространств тесно связано с задачей описания линейных изометрий таких пространств. Решение этой задачи началось с результатов С.Банаха, который установил явный вид всех линейных изометрий пространств $L_p[0,1]$ при $p \neq 2$. Позднее, в работе Ж.Ламперти были охарактеризованы все линейные изометрии пространств $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $1 \leq p < \infty, p \neq 2$ для любых измеримых пространств (Ω, Σ, μ) с полной σ-конечной мерой μ. И Банах и Ламперти использовали метод описания линейных изометрий на L_p-пространствах, не зависящий от выбора скалярного поля. Центральное место в их доказательствах описания изометрий L_p-пространств занимало установления свойства сохранения дизъюнктности для таких изометрий.

Представления сюръективных изометрий между более общими комплексными симметричными функциональными пространствами были позже получены Зайденбергом.
Все эти результаты и более полную историю можно найти в монографии
Fleming R.J., Jamison J.E. *Isometries on Banach spaces: function spaces.* North-Holland, Amsterdam - New-York - Oxford - Tokyo.
Однако ситуация сложнее в случае, когда изометрии не обязательно сюръективны. В этом случае Ю.Абрамович замечает, что даже положительные изометрии из симметричного функционального пространства E в симметричное функциональное пространство F может не иметь свойство "сохранения дизъюнктности".

Тем не менее, в коммутативном случае существует интересный и важный частный случай, когда последнее свойство может быть гарантировано для положительных изометрий "в". Этот частный случай был впервые рассмотрен в работе А.С. Векслер *Положительные изометрии нормированных функциональных пространств*, Труды Ташкентского государственного университета. "Математический анализ и теория вероятностей", 7 с. 1984., а затем пересмотрено и усилено в работах Ю.Абрамовича. Abramovich Y., *Изометрия нормированных решеток*, Оптимизация 43(60). 1988, 74–80 с. Abramovich, Y., *Operators preserving disjointess on rearrangement invariant spaces*, Pacific J. Math. 148. 1991, pp. 201–206. Дополнительным условием, используемым в этих работах, является требование строго монотонности нормы $\|\cdot\|_F$ на банаховой решетке F, т.е. условия $0 < x < y, \ x, y \in F$ влекут неравенства $\|x\|_F < \|y\|_F$.

Для функциональных пространств Орлича $L_\Phi(\Omega, \Sigma, \mu)$ с функцией Орлича Φ, удовлетворяющей (Δ_2)-условию, строго монотонность нормы позволяет получить описание положительных изометрий (см. Abdullaev R., Chilin V., *Positive isometries of Orlicz spaces*, Collection of materials of the international conference KROMSH-2020. Simferopol. "Polyprint". 2020, pp. 28–31.). Отметим также, что Ф.А. Сукочев и А.С. Векслер (см. Sukochev F., and Veksler A., *Positive Linear Isometries in Symmetric Operator Spaces*, Integr. Equ. Oper. Theory 90, 58. 2018, / doi.org/10.1007/s00020-018-2483-1.) ввели свойство K-строго монотонной нормы для некоммутативных симметрических пространств и, используя это свойство, дали описание положительных изометрий некоммутативных симметрических пространств.

Естественно ожидать, что описание линейных изометрий ПБК $L_p(B, m)$ и $L_\Phi(B, m)$, ассоциированных с полной булевой алгеброй B и мерой m, заданной на B и принимающей значения в алгебре $L^0(\Omega)$, также можно получить, использую свойство строгой монотонности векторнозначной нормы.

В первой части настоящего доклада мы даем полное описание всех линейных изометрий, действующих в $L_p(B, m)$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, в случае, когда мера m обладает свойством Магарам. Во второй части доклада с использованием свойства строгой монотонности векторнозначной нормы в пространствах Орлича-Канторовича $L_\Phi(B, m)$ дается описание всех положительных изометрий, действующих в ПБК $L_\Phi(B, m)$, в случае, когда Φ удовлетворяет (Δ_2)-условию.

Пусть X векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел и F порядково полная векторная решетка с конусом положительных элементов $F_+ = \{f \in F : f \geq 0\}$. Отображение $\|\cdot\| : X \to F_+$ называют F-значной нормой, если для любых $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$, верны обычные свойства нормы: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$; $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Говорят, что F-значная норма $\|\cdot\|$ разложима, если для любых $f_1, f_2 \in F_+$ и $x \in X$, удовлетворяющих соотношению $\|x\| = f_1 + f_2$, существуют $x_1, x_2 \in X$ такие, что $x = x_1 + x_2$ и $\|x_i\| = f_i$, $i = 1, 2$. Пара $(X, \|\cdot\|)$ с F-значной нормой называется решеточно нормированным пространством (сокращенно, РНП). Если, при этом, норма $\|\cdot\|$ разложима, то и само РНП $(X, \|\cdot\|)$ называют разложимым.

Говорят, что сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ из РНП $(X, \|\cdot\|)$ (bo)-сходится к элементу $x \in X$ (пишут $x = (bo)\text{-}\lim x_\alpha$), если сеть $(\|x - x_\alpha\|)_{\alpha\in A}$ (o)-сходится к нулю в решетке F, т.е. существует такая сеть $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset F_+$, что $f_\alpha \downarrow 0$, и $\|x - x_\alpha\| \leq f_\alpha$ при всех $\alpha \in A$. Сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset X$ называется (bo)-фундаментальной, если сеть $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha,\beta)\in A\times A}$ (bo)-сходится к нулю.
РНП называют (bo)-полным, если всякая (bo)-фундаментальная сеть в нем (bo)-сходится к элементу этого пространства. Разложимое (bo)-полное РНП называется пространством Банаха-Канторовича (сокращенно, ПБК).
Говорят, что F-значная норма $\|\cdot\|$ на векторной решетке X монотонна, если из условий $|x| \leq |y|$, $x, y \in X$, следует, что $\|x\| \leq \|y\|$. Если ПБК $(X, \|\cdot\|_X)$ одновременно является векторной решеткой и норма $\|\cdot\|_X$ монотонна, то его называют решеткой Банаха-Канторовича.

Пусть B произвольная полная булева алгебра, $Q(B)$ экстремальный вполне несвязный компакт, соответствующий B, и пусть $L^0(B) := C_\infty(Q(B))$ алгебра всех непрерывных функций $x : Q(B) \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах из $Q(B)$. Относительно частичного порядка $f \leq g \Leftrightarrow g(t) - f(t) \geq 0$ для всех $t \in Q(B) \setminus \big(f^{-1}(\pm\infty) \cup f^{-1}(\pm\infty)\big)$, алгебра $L^0(B)$ является полной порядковой векторной решеткой, а множество ∇ всех идемпотентов из $L^0(B)$ является полной булевой алгеброй относительно частичного порядка, индуцированного из $L^0(B)$, изоморфная булевой алгебре B.

Пусть (Ω, Σ, μ) измеримое пространство с σ-конечной мерой μ, $L^0(\Omega)$ алгебра всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций на (Ω, Σ, μ).

Определение

Отображение $m : B \to L^0(\Omega)$ называется $L^0(\Omega)$-значной мерой на полной булевой алгебре B, если оно удовлетворяет следующим условиям:
1) $m(e) \geq 0$ для всех $e \in B$;
2) $m(e \vee g) = m(e) + m(g)$, для любых $e, g \in B$ with $e \wedge g = \mathbf{0}$;
3) $m(e_\alpha) \downarrow 0$ для любой сети $e_\alpha \downarrow 0$, $\{e_\alpha\} \subset B$.

Говорят, что мера m *строго положительна*, если из условия $m(e) = 0$ следует, что $e = \mathbf{0}$. В этом случае, булева алгебра B также имеет счетный тип, и поэтому в условии 3) из определения $L^0(\Omega)$-значной меры вместо сети $e_\alpha \downarrow 0$ можно брать последовательность $e_n \downarrow 0$, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$.

Определение

Строго положительная $L^0(\Omega)$*-значная мера* m *называется* разложимой, *если для любых* $e \in B$ *и разложения* $m(e) = f_1 + f_2, \quad f_1, f_2 \in L^0(\Omega)_+$ *существуют такие* $e_1, e_2 \in B$, *что* $e = e_1 \vee e_2$, *и* $m(e_i) = f_i, \quad i = 1, 2.$ *Мера* m *разложима в том и только в том случае, когда она является мерой Магарам, т.е. для любых* $e \in B$, $0 \leq f \leq m(e)$, $f \in L^0(\Omega)$, *существует такое* $q \in B$, $q \leq e$, *что* $m(q) = f$.

Меры Магарам обладают следующим важным свойством.

Предложение 1

Для каждой $L^0(\Omega)$-значной меры Магарам $m : B \to L^0(\Omega)$ существует единственный инъективный вполне аддитивный гомоморфизм $\varphi : B(\Omega) \to B$ такой, что $\varphi(B(\Omega))$ есть правильная булева подалгебра в B, и $m(\varphi(q)e) = qm(e)$ для всех $q \in B(\Omega)$, $e \in B$.

В этом случае, алгебра $L^0(\Omega)$ отождествляется с алгеброй $L^0(\nabla(m)) = C_\infty(Q(\nabla(m)))$ (соответствующий изоморфизм также будем обозначать через φ), при этом, алгебру $C_\infty(Q(\nabla(m)))$ можно рассматривать как подалгебру и как правильную векторную подрешетку в $L^0(B) = C_\infty(Q(B))$ (это означает, что точные верхние и нижние границы для ограниченных подмножеств из $L^0(\nabla(m))$ совпадают в $L^0(B)$ и в $L^0(\nabla(m))$). В частности, $L^0(B)$ является $L^0(\nabla(m))$-модулем.

Рассмотрим в $L^0(B)$ векторную подрешетку $S(B)$ всех простых элементов $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $e_i \in B$, $e_i \cdot e_j = \mathbf{0}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Равенство

$$I_m(x) := \int x dm := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(e_i) \quad (x \in S(B)).$$

корректно определяет линейный порядково непрерывный оператор $I_m : S(B) \to L^0(\Omega)$. Говорят, что положительный элемент $x \in L^0(B)_+$ *m-интегрируем*, если найдется такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(B)$, $0 \leq x_n \uparrow x$, для которой в $L^0(\Omega)$ существует супремум $\sup\limits_{n \geq 1} I_m(x_n)$. В этом случае, интеграл от элемента x по мере m определяется равенством

$$I_m(x) := \int x dm := (o)\text{-}\lim_{n \to \infty} \int x_n dm.$$

Известно, что определение интеграла $I_m(x)$ не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(B)$, $0 \leq x_n \uparrow x$, для которой существует $\sup\limits_{n\geq 1} I_m(x_n)$ (см., например, Кусраев А.Г. *Мажорируемые операторы*. М.:Наука, 2003. 619с.). Элемент $x \in L^0(B)$ называют *m-интегрируем,* если его положительная и отрицательные части x_+ и x_- m-интегрируемы. Через $L^1(B,m)$ обозначается множество всех m-интегрируемых элементов, и для каждого $x \in L^1(B,m)$, полагая $\|x\|_{1,m} := \int |x|dm$, получим, что $(L^1(B,m), \|x\|_{1,m})$ есть РНП пространство над $L^0(\Omega)$. Кроме того, в случае, когда $m : B \to L^0(\Omega)$ мера Магарам, $(L^1(B,m), \|x\|_{1,m})$ есть ПБК, при этом,

$$L^0(\nabla(m)) \cdot L^1(B,m) \subset L^1(B,m), \int (\varphi(\alpha)x)dm = \alpha \int xdm,$$

для всех $x \in L^1(B,m)$, $\alpha \in L^0(\Omega)$.

Для каждого $p \geq 1$ положим

$$L^p(B,m) = \{x \in L^0(B) : |x|^p \in L^1(B,m)\},$$

$$\|x\|_{p,m} := \Big[\int |x|^p dm \Big]^{\frac{1}{p}}, \quad x \in L^p(B,m).$$

Известно, что для меры Магарам m пара $(L^p(B,m), \|x\|_{p,m})$ является пространством Банаха-Канторовича. Кроме того,

$$\varphi(\alpha)x \in L^p(B,m) \ \ \forall \ \ x \in L^p(B,m), \ \alpha \in L^0(\Omega), \ 1 \leq p < \infty,$$

и $\|\varphi(\alpha)x\|_{p,m} = |\alpha| \|x\|_{p,m}$.

Линейный оператор $T : L^0(B) \to L^0(B)$ называется *гомоморфизмом*, если $T(x \cdot y) = T(x) \cdot T(y)$ для всех $x, y \in L^0(B)$.
Положительный линейный оператор $T : L^0(B) \to L^0(B)$ называется *нормальным*, если $T(\sup\limits_{\alpha} x_\alpha) = \sup\limits_{\alpha} T(x_\alpha)$ для любой возрастающей сети $\{x_\alpha\} \subset L^0(B)$, такой, что $\mathbf{0} \le x_\alpha \uparrow x \in L^0(B)$.
Следующая теорема является векторнозначным вариантом теоремы Ламперти для пространства Банаха - Канторовича $(L^p(B, m), \| \cdot \|_{p,m})$.

Теорема 1

Пусть $U : L^p(B, m) \to L^p(B, m)$, $1 \le p < \infty$, $p \neq 2$, – *линейная изометрия. Тогда существуют нормальный гомоморфизм* $T : L^0(B) \to L^0(B)$ *и* $h \in L^p(B, m)$ *такие, что* $U(f) = h \cdot T(f)$ *для всех* $f \in L^p(B, m)$.

Пусть B – полная булева алгебра и пусть $m : B \to L^0(\Omega)$ – мера Магарам, для которой $m(\mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_{B(\Omega)}$. Алгебра $L^0(\Omega)$ отождествляется с алгеброй $C_\infty(Q(\nabla(m)))$, которая является подалгеброй и регулярной векторная подрешетка в $L^0(B) = C_\infty(Q(B))$.
Напомним, что функция $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ называется *функцией Орлича*, если Φ – непрерывная слева, выпуклая, возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$, $\Phi(t) > 0$ для всех $t > 0$.
Для каждой функции $x \in L^0(B)$ множество $G = \{t \in Q(B) : -\infty < x(t) < +\infty\}$ всюду плотно и открыто в $Q(B)$. Следовательно, для непрерывной функции $\Phi(x(t)), t \in G$, существует единственное непрерывное продолжение $y(t)$ на $Q(B)$, т.е. $\Phi(x) := y \in L^0(B)$.

Пусть $L^0(\Omega)_{++}$ – множество всех положительных элементов $\lambda \in L^0_+(\Omega)$ таких, что носитель $s(\lambda) = \mathbf{1}$. Ясно, что для любого $\lambda \in L^0(\Omega)_{++}$ существует $\lambda^{-1} \in L^0(\Omega)_{++}$ такое что $\lambda \cdot \lambda^{-1} = \mathbf{1}$. Определим *класс Юнга*

$$Y_\Phi(B,m) = \{x \in L^0(B) : \Phi(|x|) \in L^1(B,m) \ \}$$

и *пространство Орлича*

$$L_\Phi(B,m) = \{x \in L^0(B) : \Phi(\lambda^{-1}|x|) \in L^1(B,m) \text{ для нек-го } \lambda \in L^0(\Omega)_{++}$$

Положим

$$H_\Phi(B,m) = \{x \in L^0(B) : \Phi(\lambda^{-1}|x|) \in L^1(B,m) \ \text{ для всех } \lambda \in L^0(\Omega)_{++}\}$$

Ясно, что

$$H_\Phi(B,m) \subset Y_\Phi(B,m) \subset L_\Phi(B,m).$$

Кроме того, $H_\Phi(B,m)$ является линейным подпространством в линейном пространстве $L_\Phi(B,m)$, а $Y_\Phi(B,m)$ является L^0-выпуклым подмножеством в $L_\Phi(B,m)$, то есть $\lambda Y_\Phi(B,m)+(\mathbf{1}-\lambda)Y_\Phi(B,m) \subset Y_\Phi(B,m)$ для всех $\lambda \in L^0(\Omega)$, $\mathbf{0} \leq \lambda \leq \mathbf{1}$; однако $Y_\Phi(B,m)$ может не совпадать с $L_\Phi(B,m)$. Как и в случае классических пространств Орлича, равенство $H_\Phi(B,m) = L_\Phi(B,m)$ верно тогда и только тогда, когда $Y_\Phi(B,m) = 2Y_\Phi(B,m)$. Отметим также, что в случае функции Орлича $\Phi(t) = \frac{t^p}{p}$, $t \geq 0$, $1 \leq p < \infty$ выполняется равенство $L_\Phi(B,m) = L^p(B,m)$.

Положим

$$\mathcal{I}_\Phi(x) = \int \Phi(|x|)dm, \quad \text{где} \quad x \in Y_\Phi(B, m).$$

Определим $L^0(\Omega)$-значную норму Люксембурга на $L_\Phi(B, m)$, полагая

$$\|x\|_\Phi := \inf\{\lambda \in L^0(\Omega)_{++} : \mathcal{I}_\Phi(\lambda^{-1}x) \leq \mathbf{1}\}, \quad x \in L_\Phi(B, m).$$

Известно, что пара $(L_\Phi(B, m), \|\cdot\|_\Phi)$ является решеткой Банаха-Канторовича, называемой решеткой *Орлича-Канторовича, ассоциированной с $L^0(\Omega)$-значной мерой*. Кроме того, норма $\|\cdot\|_\Phi$ обладает следующим важным свойством

$$\|\alpha x\|_\Phi = |\alpha| \|x\|_\Phi, \quad \forall \ x \in L_\Phi(B, m), \ \alpha \in L^0(\Omega),$$

Определение

Говорят, что функция Орлича Φ *удовлетворяет* (Δ_2)*-условию если* $0 < \Phi(t) < \infty$ *для всех* $t > 0$ *и* $\sup\limits_{0<t<\infty} \frac{\Phi(2t)}{\Phi(t)} < \infty$.

Предложение 2

Если функция Орлича Φ *удовлетворяет* (Δ_2)*-условию, то* $L_\Phi(B, m) = H_\Phi(B, m)$.

Предложение 3

Если функция Орлича Φ *удовлетворяет* (Δ_2)*-условию и* $x \in L_\Phi(B, m)$, $\mathbf{0} \neq e \in B(\Omega)$, *то* $\|ex\|_\Phi = e$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{I}_\Phi(ex) = e$.

Говорят, что норма Люксембурга $\|\cdot\|_\Phi$ является порядково непрерывной, если $\|x_n\|_\Phi \downarrow \mathbf{0}$ для каждой последовательности $\{x_n\} \subset L_\Phi$ с $x_n \downarrow \mathbf{0}$.

Предложение 4

Если функция Орлича Φ удовлетворяет (Δ_2)-условию, то норма Люксембурга $\|\cdot\|_\Phi$ является порядково непрерывной.

Определение

Говорят, что норма $\|\cdot\|_\Phi$ строго монотонна, если условия $|x| \lneqq |y|$ $x, y \in L_\Phi(B, m)$ влекут $\|x\|_\Phi \lneqq \|y\|_\Phi$.

Применяя Предложение 3, получим следующее

Предложение 5

Если функция Орлича Φ удовлетворяет (Δ_2)-условию, то норма Люксембурга $\|\cdot\|_\Phi$ является строго монотонной.

Следствие 1

Если функция Орлича Φ удовлетворяет (Δ_2)-условию, и $x, y \in L_\Phi(B, m)_+$, то $x \cdot y = \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда $\|x + y\|_\Phi = \|x - y\|_\Phi$.

Следствие 2

Пусть функция Орлича Φ удовлетворяет (Δ_2)-условию, и пусть $V : L_\Phi(B, m) \to L_\Phi(B, m)$ положительная линейная изометрия. Если $x, y \in L_\Phi(B, m)_+$ и $x \cdot y = \mathbf{0}$, то $V(x) \cdot V(y) = \mathbf{0}$.

Следующая теорема дает описание всех положительных линейных изометрий, действующих в пространствах Орлича-Канторовича.

Теорема 2

Пусть функция Орлича Φ *удовлетворяет* (Δ_2)*-условию, и пусть* $V : L_\Phi(B, m) \to L_\Phi(B, m)$ *положительная линейная изометрия. Тогда существуют инъективный нормальный гомоморфизм* $T : L^0(B) \to L^0(B)$ *и положительный элемент* $y \in L_\Phi(B, m)$ *такие, что* $V(x) = y \cdot T(x)$ *для всех* $x \in L_\Phi(B, m)$.

С П А С И Б О З А В Н И М А Н И Е!